文章编号:1000-4939(2022)06-1055-10

# 基于计算均匀化方法的梯度多孔结构优化设计

陈炼雄,肖奥宇,刘辉
(武汉大学土木建筑工程学院工程力学系,430072 武汉)

**摘 要**:多孔结构凭借轻量化、高比强度等优越性能,在现代工业领域受到越来越多的关注。增材制造技术的快速发展,使得具有复杂构型的多孔结构的制备成为可能,进一步促进了多孔结构设计方法的进步。多孔结构设计方法主要有尺度分离和尺度关联两种途径,本研究从尺度分离的思想出发,基于计算均匀化方法,针对随机(两种维诺型)和非随机(方框型)梯度多孔结构,发展了多尺度优化设计方法。该方法主要包括3个步骤:微观尺度微结构建模分析(涵盖微结构几何生成、等效物理量的计算、几何参数与各物理量之间映射关系的建立)、宏观尺度结构优化和全尺度多孔结构几何重构。该方法具有较高的计算效率,同时保证了相邻微结构之间的完美连接。利用贴体三角形网格划分,建立多孔结构全尺度有限元模型,以方框型梯度多孔结构和两种维诺型梯度多孔结构为例,开展了多孔结构尺寸效应分析及三点弯曲梁数值试验,验证了本研究方法的有效性和梯度多孔结构的优越性,研究表明多孔结构相对于单尺度结构具有较好的承载能力和延展性。
**关键词**:梯度多孔结构;多尺度优化;计算均匀化;尺度分离;尺寸效应
**中图分类号**:TU318 **文献标志码**:A **DOI**:10.11776/j.issn.1000-4939.2022.06.006

# Optimization design of graded cellular structure based on the homogenization approach

CHEN Lianxiong,XIAO Aoyu,LIU Hui
(Department of Engineering Mechanics,School of Civil Engineering of Wuhan University,430072 Wuhan,China)

**Abstract**:Cellular structures have attracted increasing attention in modern industry because of their excellent properties such as light weight and high specific strength. The rapid development of additive manufacturing technology makes it possible to fabricate cellular structures with complex configurations,which further promotes the progress of cellular structure design methods. There are two main methods of cellular structure design:the scale-separated approach and the scale-related approach. Based on the idea of scale-separated approach and computational homogenization method,this paper develops a multi-scale optimization design method for stochastic (two kinds of Voronoi-shaped) and non-stochastic (box-shaped) graded cellular structures. This method mainly containsthree steps,i. e. ,the modeling and analysis of microstructure on the microscale (including the generation of microstructural geometry,calculation of equivalent physical quantities,and establishment of mapping relationship between geometric parameters and physical

收稿日期:2022-09-15 修回日期:2022-11-06
基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 12072242)
通信作者:刘辉,副教授。E-mail:h. liu@whu. edu. cn
引用格式:陈炼雄, 肖奥宇, 刘辉. 基于计算均匀化方法的梯度多孔结构优化设计[J]. 应用力学学报,2022,39(6):1055-1064.
CHEN Lianxiong,XIAO Aoyu,LIU Hui. Optimization design of graded cellular structure based on the homogenization approach[J]. Chinese journal of applied mechanics,2022,39(6):1055-1064.

quantities), optimization of the macrostructure on the macroscale, and reconstruction of the graded cellular structure on the full-scale. This proposed scale-separated method has high computational efficiency and ensures the connectivity of the microstructure perfectly. The full-scale finite element model of the obtained cellular structure is established by using the triangle-fitting mesh division. The size effect analysis and the three-point bending beam numerical experiment of the cellular structures are carried out by taking the box-shaped graded cellular structure and two kinds of Voronoi-shaped graded cellular structure as examples, which verify the effectiveness of the proposed method and the superiority of the obtained graded cellular structure. The results show that the bearing capacity and the ductility of the graded cellular structure are better than the single-scale structure with little stiffness loss.

**Key words**: graded cellular structure; multiscale optimization; homogenization; scale-separated; size effect



随着科学技术的不断发展,人类对新材料和新结构的需求越来越高,高性能、低能耗等成了不必可少的条件。在工业需求的驱动下,结构材料一体化设计方法研究备受推崇,旨在通过多尺度设计途径得到性能更加优越的多尺度结构。增材制造技术的快速发展[1-3],进一步解决了多尺度结构生产制造难题,推动形成多尺度结构发展应用新格局。

自然界中的竹子、骨头等多孔结构是典型的多尺度结构,具有重量轻、强度高、耐冲击等优点[4-6],得到了工业领域工程师们的青睐。多尺度结构通常具有两个或多个特征尺度:材料尺度称为微观尺度,结构尺度称为宏观尺度。两个尺度相互耦合,微观材料的分布会影响其宏观物理性能,宏观结构边界条件的改变又会引起局部微观材料分布的变化。实现宏微观尺度结构和材料一体化设计是极具挑战性的课题。学者们发展了许多具有代表性的多尺度方法,如计算均匀化方法[7-9]、多尺度有限元方法[10]和全尺度/减缩尺度方法[11-15]。这些方法可以分为两类,即尺度分离途径和尺度关联途径。尺度分离途径的核心思想是将结构划分为宏观尺度和微观尺度,基于计算均匀化方法或代表体元法等,计算微观尺度的宏观等效力学性能,该途径具有较高的效率,但是需要解决微观尺度结构连接性问题,并开展尺寸效应分析。尺度关联途径是建立宏观和微观尺度物理量之间的联系,并进行全尺度优化设计,该方法保证了微结构完美连接,但是通常计算效率较低,难以用于大规模多尺度结构的优化设计。因此,开展多孔结构宏微观一体化设计方法研究,保证计算效率和微结构连接性,具有重要的意义。

按微结构类型划分,多孔结构可分为非随机多孔结构[16-19]和随机多孔结构[20-24],其中非随机多孔结构以方框型、X 型等基本微结构构型及其组合构型组成,这些基本构型结构形式简单,几何参数较少,可控性良好,但同时具有较强的各向异性特征,导致多尺度结构对边界条件的敏感性显著增大。而随机多孔结构以不规则多边型微结构为主,如维诺型,随机微结构表现出较好的各向同性性质,在实际应用中表现出优越的力学行为。目前对于随机微结构优化设计的研究并不多,Wu 等[25]基于均匀化和参数化方法,提出了一种共形多孔结构优化设计方法;Do 等[26]基于均匀化途径,发展了一种维诺随机多孔结构设计方法;Lei 等[27]提出了一种参数化维诺多孔结构设计方法。

本工作基于计算均匀化方法,针对随机和非随机梯度多孔结构,提出了相应的多尺度结构优化设计方法。该方法采用了尺度分离思想,在微观尺度上,进行微结构建模和分析。基于均匀化方法,计算微结构的宏观等效弹性张量,建立微结构物理量(宏观等效弹性张量、切割高度、平均长细比)与相对密度之间的映射关系。在宏观尺度上,发展一种无惩罚变密度拓扑优化方法,得到宏观结构相对密度分布。在全尺度上,基于宏观相对密度分布和微观映射关系,计算全尺度结构的符号距离函数或切割曲面,通过切割符号距离函数,得到全尺度多孔结构几何构型。

## 1 微观尺度映射关系

本节将介绍非随机微结构和随机微结构物理量和相对密度之间映射关系的建立,即正则化近似各向同性拉梅常数、正则化弹性矩阵、切割高度、平均长细比与相对密度的映射关系。主要内容涉及微结构生成、均匀化以及映射关系的建立等。其中非随机微结构以方框型微结构为例,随机微结构以维诺

型微结构为例。

## 1.1　微结构生成

如图 1 所示，随机维诺型微结构生成过程中，基于网格生成算法[28]，在微结构域内随机生成节点，形成网格剖分，微结构域边界节点需满足对称性要求，不断迭代并收敛形成均匀的三角形节点和网格剖分。利用维诺型和三角形网格剖分在空间几何的耦合关系[29]，得到维诺型网格剖分，即维诺型微结构骨架。基于快速行进方法[30]，计算得到微结构骨架的符号距离函数$f_s(x,y)$。通过水平集函数$\phi_m = f_s(x,y) + t_0$，得到维诺型微结构，即

$$\begin{cases} \phi_m > 0, \text{微结构实体材料} \\ \phi_m = 0, \text{微结构边界} \\ \phi_m < 0, \text{微结构空材料} \end{cases} \tag{1}$$

其中$t_0 = t/2$，$t$ 是微结构内部杆件的宽度。

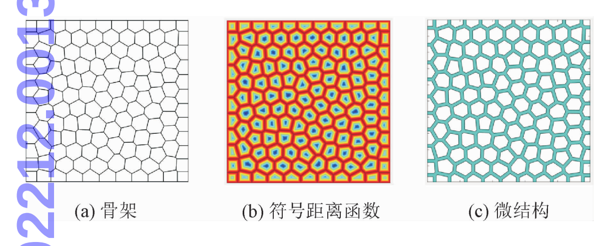



图 1　随机维诺型微结构生成过程

Fig. 1　Generation process of the stochastic Voronoi-shaped microstructure

如图 2 所示，非随机方框型微结构生成过程中，水平集函数$\varphi_b$定义如下。

$$\varphi_b = \max(2|\xi| - 1, 2|\eta| - 1) \tag{2}$$

其中 $\xi(-1 \leqslant \xi \leqslant 1)$ 和 $\eta(-1 \leqslant \eta \leqslant 1)$ 是微结构域局部坐标。

用不同高度平面切割水平集函数，将得到不同方框型微结构。由于水平集函数的取值范围为 $[-1,1]$，当切割高度小于 $-1$ 时，将得到实体方框型微结构；当切割高度大于 1 时，将得到空白方框型微结构；图 2(c) 中所示为切割高度为 0.6 时对应的方框型微结构。

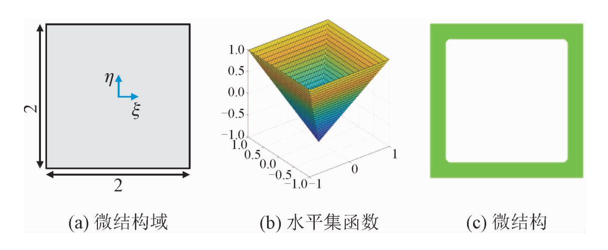



图 2　非随机方框型微结构生成过程

Fig. 2　Generation process of the non-stochastic box-shaped microstructure

## 1.2　微结构均匀化

根据计算均匀化理论[31]，周期性微结构的宏观等效弹性张量$\boldsymbol{E}^{\mathrm{H}}_{ijkl}$表示如下。

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{H}}_{ijkl} = \frac{1}{|Y_m|}\int_{Y_m} \boldsymbol{E}_{pqrs}(\boldsymbol{\varepsilon}^{0(ij)}_{pq} - \boldsymbol{\varepsilon}^{(ij)}_{pq})(\boldsymbol{\varepsilon}^{0(kl)}_{rs} - \boldsymbol{\varepsilon}^{(kl)}_{rs})\mathrm{d}Y \tag{3}$$

其中：$|Y_m|$是微结构体积；$\boldsymbol{E}_{pqrs}(x,y)$是局部变刚度弹性张量；$\boldsymbol{\varepsilon}^{(ij)}_{pq}$是局部变化的应变场；$\boldsymbol{\varepsilon}^{0(ij)}_{pq}$是已知的宏观应变场。对于二维问题，$\boldsymbol{\varepsilon}^{0(ij)}_{pq}$分别为$\boldsymbol{\varepsilon}^{0(11)}_{pq} = \{1,0,0\}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\varepsilon}^{0(22)}_{pq} = \{0,1,0\}^{\mathrm{T}}$和$\boldsymbol{\varepsilon}^{0(12)}_{pq} = \{0,0,1\}^{\mathrm{T}}$。

根据 Voigt 记号，微结构等效弹性张量$\boldsymbol{E}^{\mathrm{H}}_{ijkl}$可以写成矩阵的形式

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} D^{\mathrm{H}}_{11} & D^{\mathrm{H}}_{12} & D^{\mathrm{H}}_{13} \\ D^{\mathrm{H}}_{21} & D^{\mathrm{H}}_{22} & D^{\mathrm{H}}_{23} \\ D^{\mathrm{H}}_{31} & D^{\mathrm{H}}_{32} & D^{\mathrm{H}}_{33} \end{bmatrix}, D^{\mathrm{H}}_{ij} = D^{\mathrm{H}}_{ji} \tag{4}$$

表 1 给出了一个维诺型微结构和方框型微结构等效弹性矩阵，其中微结构实体材料和空材料的无量纲拉梅常数分别为 $(\lambda_{\mathrm{solid}} = 2, \mu_{\mathrm{solid}} = 4)$ 和 $(\lambda_{\mathrm{void}} = 10^{-3}\lambda_{\mathrm{solid}}, \mu_{\mathrm{void}} = 10^{-3}\mu_{\mathrm{solid}})$。从表 1 可以看出，方框型微结构等效弹性矩阵只有 3 个参数，维诺型微结构等效弹性矩阵有 6 个参数，其中有 2 个参数值很小。进一步地，当维诺型微结构内部杆件数量足够多时，微结构将趋于各向同性，因此有必要对维诺型微结构各向异性弹性进行近似各向同性化处理。

**表 1　均匀化结果**

Tab. 1　Results of the homogenization

| 微结构 | $\boldsymbol{D}^{\mathrm{H}}$ |
|---|---|
| | $\begin{bmatrix} 1.4380 & 0.8601 & 0.0072 \\ 0.8601 & 1.4397 & -0.0021 \\ 0.0072 & -0.0021 & 0.3056 \end{bmatrix}$ |
| | $\begin{bmatrix} 1.9993 & 0.1122 & 0 \\ 0.1122 & 1.9993 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0544 \end{bmatrix}$ |

近似各向同性理论[32]是将各向异性弹性张量空间通过正交算子，映射到各向同性张量子空间。

基于此,近似各向同性拉梅常数 $\lambda^{iso}$ 和 $\mu^{iso}$ 计算如下。

$$\begin{cases}\lambda^{iso}=\dfrac{1}{8}(D_{11}^{H}+D_{22}^{H}-4D_{33}^{H}+6D_{12}^{H})\\ \mu^{iso}=\dfrac{1}{8}(D_{11}^{H}+D_{22}^{H}+4D_{33}^{H}-2D_{12}^{H})\end{cases} \tag{5}$$

进而计算得到近似各向同性矩阵 $\boldsymbol{D}^{iso}$

$$\boldsymbol{D}^{iso}=\begin{bmatrix}\lambda^{iso}+2\mu^{iso} & \lambda^{iso} & 0\\ \lambda^{iso} & \lambda^{iso}+2\mu^{iso} & 0\\ 0 & 0 & \mu^{iso}\end{bmatrix} \tag{6}$$

为了量化近似各向同性化处理的误差,各向异性指数 $I_A$ 定义为

$$I_A=\sqrt{1-\frac{\|\boldsymbol{D}^{iso}\|^2}{\|\boldsymbol{D}^{H}\|^2}} \tag{7}$$

其中 $\|\boldsymbol{D}^{iso}\|^2$ 和 $\|\boldsymbol{D}^{H}\|^2$ 表达式为

$$\begin{cases}\|\boldsymbol{D}^{iso}\|^2=4(\lambda^{iso})^2+12(\mu^{iso})^2+8\lambda^{iso}\mu^{iso}\\ \|\boldsymbol{D}^{H}\|^2=\sum\limits_{i,j=1}^{2}(D_{ij}^{H})^2+4\sum\limits_{k=1}^{3}(D_{k3}^{H})^2\end{cases} \tag{8}$$

结合式(5)、(7)和(8),得到表 1 中维诺型微结构等效弹性矩阵各向同性指数 $I_A=0.011$,接近于 0,说明近似各向同性化处理是较为合理的。

### 1.3 微结构映射关系建立

计算微结构相对密度时,采用了固定背景网格。如图 3 所示,微结构中有 3 种网格单元:实体单元、空白单元和混合单元。微观结构的相对密度 $\rho_m$ 的计算如下。

$$\rho_m=\frac{\int_{V_m}H(\phi_m)\mathrm{d}V}{\int_{V_m}\mathrm{d}V}=\frac{1}{|V_m|}\sum_{i=1}^{N_e}\rho_m^i \tag{9}$$

其中:$H(x)$ 是 Heaviside 函数;$V_m$ 表示微观结构域;$N_e$ 表示单元数量;$\rho_m^i$ 是微观结构中第 $i$ 个单元的材料体积。

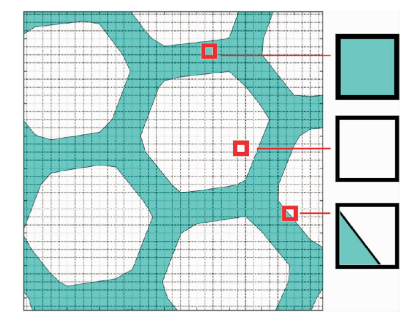


图 3 背景网格示意图

Fig. 3 Illustration of the background grid

$\rho_m^i$ 的表达式为

$$\rho_m^i=\int_{V_m^i}H(\phi_m)\mathrm{d}V=\sum_{p=1}^{N_g}H(\phi_m(\boldsymbol{\xi}_p))\,|\boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{\xi}_p)|\,w_p \tag{10}$$

其中:$\boldsymbol{J}_i$ 表示第 $i$ 个单元的雅可比矩阵;$\boldsymbol{\xi}_p$ 表示高斯积分点的坐标向量;$w_p$ 表示积分权重因子;$V_m^i$ 为第 $i$ 个单元域;$N_g$ 为高斯积分点个数。

在维诺型微结构物理量与相对密度映射关系建立过程中,建立了 3 种映射关系。通过改变切割高度,计算对应微结构的相对密度,得到切割高度 $h$ 与相对密度之 $\rho_m$ 间离散的映射关系,并采用样条插值得到连续的映射关系,如图 4(a)所示。

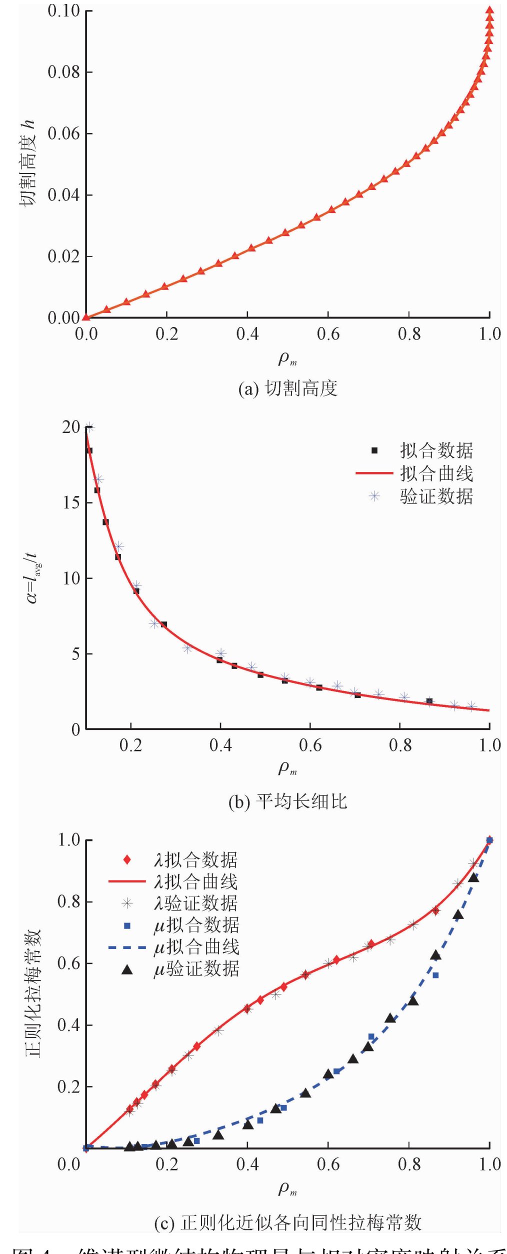



图 4 维诺型微结构物理量与相对密度映射关系

Fig. 4 Mapping relationship between relative density and physical quantity of Voronoi-shaped microstructure

同样地,采用指数函数拟合内部杆件平均长细比 $\alpha = l_{avg}/t$ 与相对密度 $\rho_m$ 的关系,如图 4(b)所示,这里 $l_{avg}$ 为杆件平均长度,且

$$\alpha = a e^{b\rho_m} + c e^{d\rho_m} \tag{11}$$

其中:$a$,$b$,$c$ 和 $d$ 是拟合参数,如表 2 所示。

**表 2　拟合参数 $a$,$b$,$c$ 和 $d$**

Tab. 2　Fitting parameters $a$,$b$,$c$ and $d$

| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|
| 43.8 | -13.46 | 10.15 | -2.107 |

此外,采用多项式拟合正则化近似各向同性拉梅常数($\lambda_{norm} = \lambda^{iso}/\lambda_{solid}$,$\mu_{norm} = \mu^{iso}/\mu_{solid}$)与相对密度 $\rho_m$ 之间的关系,如图 4(c)所示。

$$\begin{cases} \lambda_{norm} = p_1^\lambda \rho_m^4 + p_2^\lambda \rho_m^3 + p_3^\lambda \rho_m^2 + p_4^\lambda \rho_m + p_5^\lambda \\ \mu_{norm} = p_1^\mu \rho_m^4 + p_2^\mu \rho_m^3 + p_3^\mu \rho_m^2 + p_4^\mu \rho_m + p_5^\mu \end{cases} \tag{12}$$

其中:$p_i^\lambda$ 和 $p_i^\mu$($i = 1 \sim 5$)是拟合参数,如表 3 所示。

在方框型微结构映射关系建立过程中,如图 5(a)所示,采用多项式拟合方型微结构正则化等效弹性矩阵 $\widehat{\boldsymbol{D}}_{ij}^{H}(\rho_m) = \boldsymbol{D}_{ij}^{H}(\rho_m)/\boldsymbol{D}_{ij}^{H}(1)$($ij = 11,12,33$),其中,$\boldsymbol{D}_{ij}^{H}(1)$ 是实体材料($\rho_m = 1$)单元对应的弹性矩阵。

$$\begin{cases} \widehat{D}_{11}^{H}(\rho_m) = a^{11}\rho_m^4 + b^{11}\rho_m^3 + c^{11}\rho_m^2 + d^{11}\rho_m \\ \widehat{D}_{12}^{H}(\rho_m) = a^{12}\rho_m^4 + b^{12}\rho_m^3 + c^{12}\rho_m^2 + d^{12}\rho_m \\ \widehat{D}_{33}^{H}(\rho_m) = a^{33}\rho_m^4 + b^{33}\rho_m^3 + c^{33}\rho_m^2 + d^{33}\rho_m \end{cases} \tag{13}$$

其中:$a^{ij}$,$b^{ij}$,$c^{ij}$,$d^{ij}$ 是拟合参数,如表 4 所示。

**表 3　拟合参数 $p_i^\lambda$ 和 $p_i^\mu$($i = 1 \sim 5$)**

Tab. 3　Fitting parameters $p_i^\lambda$ and $p_i^\mu$($i = 1 \sim 5$)

| | $i=1$ | $i=2$ | $i=3$ | $i=4$ | $i=5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i^\lambda$ | 2.912 | -4.545 | 1.189 | 1.047 | 0.009 |
| $p_i^\mu$ | 2.192 | -2.276 | 2.158 | -0.294 | 0.015 |

**表 4　拟合参数 $a^{ij}$,$b^{ij}$,$c^{ij}$ 和 $d^{ij}$**

Tab. 4　Fitting parameters $a^{ij}$,$b^{ij}$,$c^{ij}$ and $d^{ij}$

| | $a^{ij}$ | $b^{ij}$ | $c^{ij}$ | $d^{ij}$ |
|---|---|---|---|---|
| $ij=11$ | 1.527 0 | -1.983 0 | 1.102 0 | 0.350 4 |
| $ij=12$ | 0.469 5 | 0.478 3 | -0.009 9 | 0.066 4 |
| $ij=33$ | 1.934 0 | -1.261 0 | 0.341 9 | -0.013 4 |

如图 5(b)所示,方框型微结构切割高度 $h$ 与相对密度 $\rho_m$ 之间的连续映射关系通过样条插值得到。

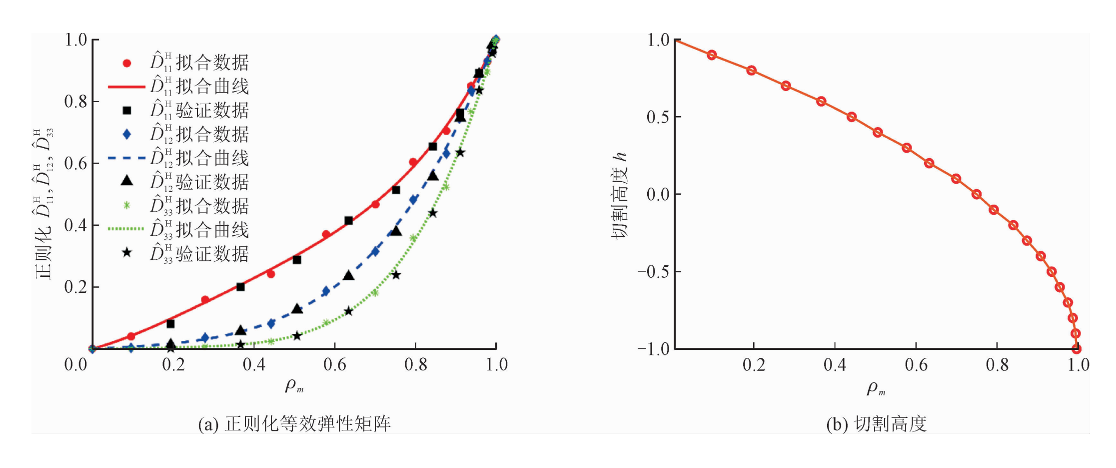



图 5　方框型微结构物理量与相对密度映射关系

Fig. 5　Mapping relationship between relative density and physical quantity of box-shaped microstructure

## 2　宏观优化列式

本研究提出了一种无惩罚密度优化方法,考虑最小柔顺性优化问题,优化列式为

$$\text{OPT}\begin{cases} \min: J(\rho) = \boldsymbol{F}^{T}\boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{K}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{F} \\ \text{s.t.}: \quad V - \overline{V} \leqslant 0 \\ \rho_{min} \leqslant \rho \leqslant \rho_{max} \end{cases} \tag{14}$$

其中：$J$ 是目标函数；$\rho$ 是相对密度；$\boldsymbol{F}$ 是外力荷载；$\boldsymbol{U}$ 是位移向量；$\boldsymbol{K}$ 是刚度矩阵；$V=\int_{\Omega}\rho \mathrm{d}\Omega$ 是结构体积分数；$\overline{V}$是结构体积分数上限；$\rho_{\max}$ 和$\rho_{\min}$ 分别为相对密度上下限。

在优化过程中，基于有限元方法对结构进行离散计算，采用 OC 准则求解优化问题。

目标函数对相对密度的灵敏度为

$$\frac{\partial J}{\partial \rho_e}=-\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \rho_e}\boldsymbol{U} \tag{15}$$

对于维诺型多孔结构，$\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \rho_e}$计算如下。

$$\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \rho_e}=\sum_{e=1}^{N_e}\boldsymbol{C}_e^{\mathrm{T}}\left(\int_{\Omega}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{D}^{\mathrm{iso}}}{\partial \rho_e}\boldsymbol{B}\mathrm{d}\Omega\right)\boldsymbol{C}_e \tag{16}$$

其中：$\boldsymbol{C}_e$是扩充矩阵[33]，用以将单元刚度集成到总体刚度；$\boldsymbol{B}$ 是应变矩阵；$\Omega$ 是单元域；$\frac{\partial \boldsymbol{D}^{\mathrm{iso}}}{\partial \rho_e}$计算如下。

$$\frac{\partial \boldsymbol{D}^{\mathrm{iso}}}{\partial \rho_e}=\begin{bmatrix}\frac{\partial \lambda^{\mathrm{iso}}}{\partial \rho_e}+2\frac{\partial \mu^{\mathrm{iso}}}{\partial \rho_e} & \frac{\partial \lambda^{\mathrm{iso}}}{\partial \rho_e} & 0\\ \frac{\partial \lambda^{\mathrm{iso}}}{\partial \rho_e} & \frac{\partial \lambda^{\mathrm{iso}}}{\partial \rho_e}+2\frac{\partial \mu^{\mathrm{iso}}}{\partial \rho_e} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial \mu^{\mathrm{iso}}}{\partial \rho_e}\end{bmatrix} \tag{17}$$

其中

$$\frac{\partial \lambda^{\mathrm{iso}}}{\partial \rho_e}=\lambda_{\mathrm{solid}}\frac{\partial \lambda_{\mathrm{norm}}}{\partial \rho_e},\quad \frac{\partial \mu^{\mathrm{iso}}}{\partial \rho_e}=\mu_{\mathrm{solid}}\frac{\partial \mu_{\mathrm{norm}}}{\partial \rho_e} \tag{18}$$

$$\begin{cases}\frac{\partial \lambda_{\mathrm{norm}}}{\partial \rho_e}=\lambda_{\mathrm{solid}}(4p_1^{\lambda}\rho_e^3+3p_2^{\lambda}\rho_e^2+2p_3^{\lambda}\rho_e+p_4^{\lambda})\\ \frac{\partial \mu_{\mathrm{norm}}}{\partial \rho_e}=\mu_{\mathrm{solid}}(4p_1^{\mu}\rho_e^3+3p_2^{\mu}\rho_e^2+2p_3^{\mu}\rho_e+p_4^{\mu})\end{cases} \tag{19}$$

对于方框型多孔结构，$\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \rho_e}$计算如下。

$$\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \rho_e}=\sum_{e=1}^{N_e}\boldsymbol{C}_e^{\mathrm{T}}\left(\int_{\Omega}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{D}^{\mathrm{H}}}{\partial \rho_e}\boldsymbol{B}\mathrm{d}\Omega\right)\boldsymbol{C}_e \tag{20}$$

其中

$$\frac{\partial \boldsymbol{D}^{\mathrm{H}}}{\partial \rho_e}=\begin{bmatrix}\frac{\partial D_{11}^{\mathrm{H}}}{\partial \rho_e} & \frac{\partial D_{12}^{\mathrm{H}}}{\partial \rho_e} & 0\\ \frac{\partial D_{12}^{\mathrm{H}}}{\partial \rho_e} & \frac{\partial D_{11}^{\mathrm{H}}}{\partial \rho_e} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial D_{33}^{\mathrm{H}}}{\partial \rho_e}\end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\begin{cases}\frac{\partial D_{11}^{\mathrm{H}}}{\partial \rho_e}=\frac{\partial \widehat{D}_{11}^{\mathrm{H}}}{\partial \rho_e}D_{11}^{\mathrm{H}}(1)\\ \frac{\partial D_{12}^{\mathrm{H}}}{\partial \rho_e}=\frac{\partial \widehat{D}_{12}^{\mathrm{H}}}{\partial \rho_e}D_{12}^{\mathrm{H}}(1)\\ \frac{\partial D_{33}^{\mathrm{H}}}{\partial \rho_e}=\frac{\partial \widehat{D}_{33}^{\mathrm{H}}}{\partial \rho_e}D_{33}^{\mathrm{H}}(1)\end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases}\frac{\partial \widehat{D}_{11}^{\mathrm{H}}}{\partial \rho_e}=4a^{11}\rho_e^3+3b^{11}\rho_e^2+2c^{11}\rho_e+d^{11}\\ \frac{\partial \widehat{D}_{12}^{\mathrm{H}}}{\partial \rho_e}=4a^{12}\rho_e^3+3b^{12}\rho_e^2+2c^{12}\rho_e+d^{12}\\ \frac{\partial \widehat{D}_{33}^{\mathrm{H}}}{\partial \rho_e}=4a^{33}\rho_e^3+3b^{33}\rho_e^2+2c^{33}\rho_e+d^{33}\end{cases} \tag{23}$$

对于方框型和维诺型多孔结构，目标函数对体积约束的灵敏度为

$$\frac{\partial V}{\partial \rho_e}=\int_{\Omega}\mathrm{d}\Omega=V_e \tag{24}$$

其中：$V_e$表示单元体积分数。

## 3 全尺度多孔结构几何重构

本小节以图 6(a)所示的悬臂梁为例，尺寸为 $W/L=1/2$，介绍了维诺型梯度多孔结构及方框型梯度多孔结构全尺度几何构建过程，其中维诺型梯度多孔结构(Ⅰ、Ⅱ)采用了 2 种方式进行构建。方框型多孔结构和Ⅰ型维诺多孔结构是利用切割高度与相对密度映射关系重构的，Ⅱ型维诺多孔结构是基于杆件平均长细比与相对密度的映射关系重构的。

如图 6(b)和图 6(c)所示，对于方框型梯度多孔结构和Ⅰ型维诺梯度多孔结构，得到宏观尺度优化相对密度分布后，基于微观尺度切割高度和相对密度的映射关系，得到切割高度分布，构建切割高度曲面切割结构域水平集函数，得到梯度多孔结构构型。

如图 6(d)所示，对于Ⅱ型维诺型梯度多孔结构，得到宏观尺度优化相对密度分布后，基于微观尺度内部杆件平均长细比与相对密度的映射关系，得到平均长细比分布。基于平均长细比分布，借助网格生成算法，得到Ⅱ型维诺多孔结构骨架。基于快速行进方法，计算骨架的符号距离函数，切割基于骨架符号距离函数构建的水平集函数，得到梯度多孔结构。

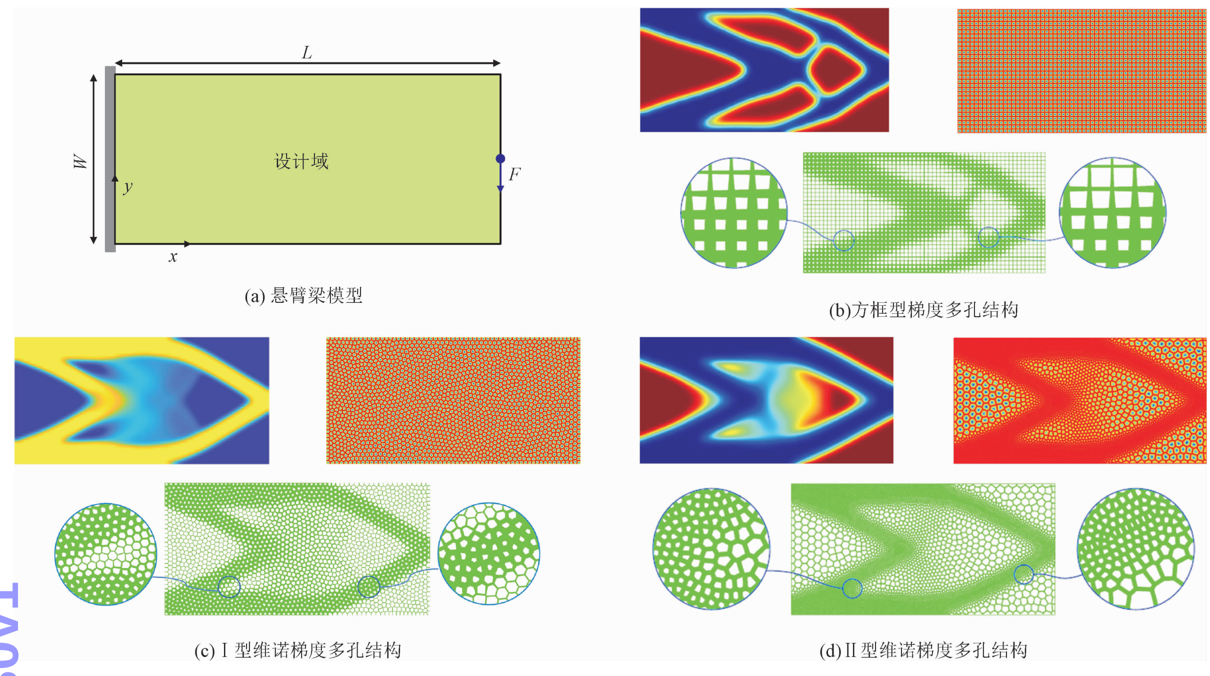



图 6　梯度多孔结构重构

Fig. 6　Reconstruction of the graded cellular structures

## 4　数值算例

以悬臂梁和简支梁为例，基于全尺度有限元分析方法，开展了尺寸效应研究和三点弯曲梁数值试验，验证本研究所发展方法的正确性，探究基于该方法优化设计的方框型和两种维诺型梯度多孔结构性能的优越性。其中尺寸效应分析基于如图 6(a)所示的悬臂梁模型，三点弯曲梁数值试验基于如图 7 所示的简支梁模型，尺寸 $W/L=1/3$。考虑平面应变问题，所有物理量都是无量纲的。

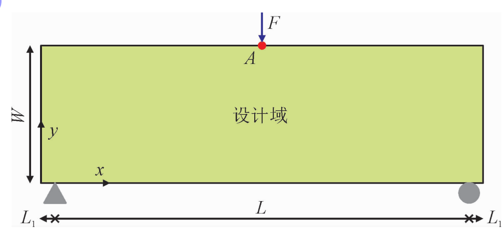



图 7　三点弯曲梁数值试验模型

Fig. 7　Model of the three-point bending numerical experiment

### 4.1　尺寸效应分析

本小节通过对比方框型多孔结构(微结构数量分别为 60×30，30×15，20×10)，Ⅰ型维诺多孔结构(胞元数量分别为 2 000、1 000、500)，Ⅱ型维诺多孔结构(内部杆件宽度分别为 0.032、0.043 6、0.055 4)，探究所发展的多尺度方法在优化多孔结构时的尺寸效应。3 种多孔结构的密度上下限均为 $\rho_{max}=0.8$ 和 $\rho_{min}=0.2$。

如图 8 所示，借助 Abaqus 软件，基于全尺度有限元分析，与宏观优化结果对比，验证方法的正确性。在宏观尺度优化过程中，方框型多孔结构、Ⅰ型和Ⅱ型维诺多孔结构的柔度值分别为 13.31、13.23、13.19。全尺度有限元计算得到的 3 种方框型多孔结构(微结构数量分别为 60×30、30×15、20×10)承受单位外荷载时的最大位移分别为 12.33、13.08、13.67，3 种Ⅰ型维诺多孔结构(微结构数量分别为 2 000、1 000、500)承受单位外荷载时的最大位移分别为 12.53、12.91、13.48，3 种Ⅱ型维诺多孔结构(内部杆件宽度分别为 0.032、0.043 6、0.055 4)承受单位外荷载时的最大位移分别为 12.19、12.73、13.24。表 5 给出了有限元结果与宏观优化结果误差，其中“－”表示有限元结果比优化结果小，“＋”表示有限元结果比优化结果大。可以看出，全尺度有限元计算的结果与宏观尺度优化结果比较接近，表明本研究所提出的多孔结构优化的设计方法是正确性与有效性。

通过对比方框型多孔结构不同微结构数量、Ⅰ型维诺多孔结构不同微结构数量及Ⅱ型维诺多孔结构不同内部杆件宽度全尺度有限元计算过程中结构承受单位外荷载时的位移云图，可以看出，位移分布近乎相同。通过对比最大位移值，可以看出，随着多

孔结构微结构数量增多或内部杆件宽度变小,多孔结构更加密实,结构刚度更大,对应的结构最大位移也逐渐减小,但位移值相差不大,表明基于本研究方法得到的 3 种梯度多孔结构均对尺寸敏感性较低。

**表 5 全尺度有限元尺寸效应分析误差**

Tab. 5 Error of full-scale finite element size effect analysis

| 误差 | 方框型/% | 维诺型(Ⅰ)/% | 维诺型(Ⅱ)/% |
|---|---|---|---|
| 60×30/2 000/0.032 | -7.36 | -5.29 | -7.58 |
| 30×15/1 000/0.043 6 | -1.76 | -2.41 | -3.49 |
| 20×10/500/0.055 4 | +2.70 | +1.89 | +0.38 |

需要指出的是,当相对密度下限取更小的值时,宏观密度分布中相对密度小的区域,如结构右上角和右下角部分,重构得到的多孔结构较为稀疏。当相对密度下限趋于 0 时,宏观密度分布中相对密度接近 0 的区域,重构得到的多孔结构几乎为空材料,导致局部结构不稳定,影响整体结构性能。因此本研究相对密度下限取为 0.2。

不可否认的是,由于本研究密度下限取 0.2,结构右上角和右下角部分对刚度贡献不大的区域,仍会出现在结果中,需要进一步改进,以期提高结构性能。

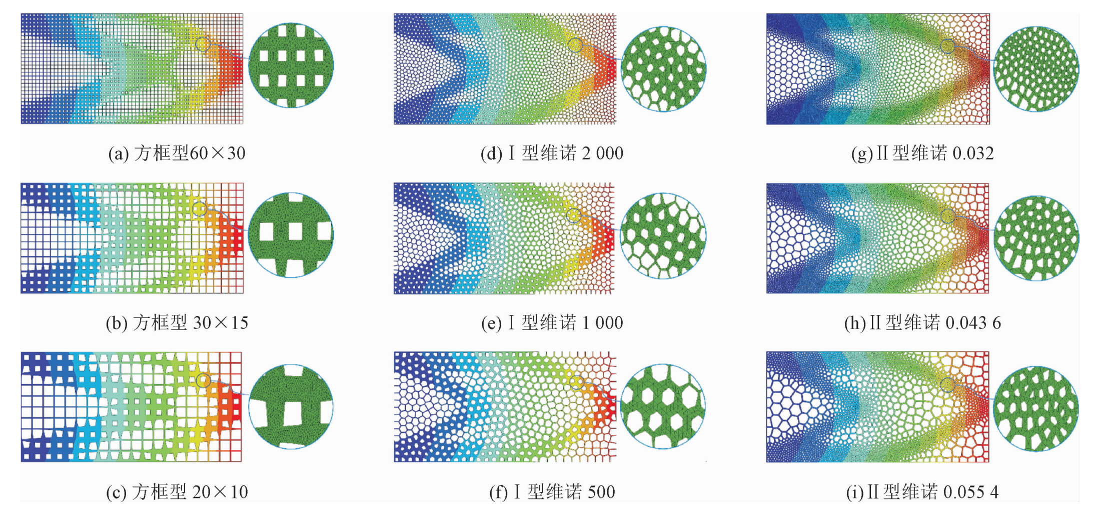



图 8 不同梯度多孔结构全尺度有限元尺寸效应分析

Fig. 8 Full-scale finite element size effect analysis of different cellular structures

## 4.2 三点弯曲梁数值试验

如图 9 所示,将 3 种多孔结构与基于参化水平集方法优化得到的单尺度结构作对比,通过三点弯曲梁数值试验,探究多孔结构性能的优越性。在全尺度有限元模拟过程中,采用了超弹性材料本构关系,考虑了几何非线性。4 种结构体积分数上限均为 0.4,方框型多孔结构微结构数量为 96×30,Ⅰ型维诺多孔结构的微结构数量为 2 000,Ⅱ型维诺多孔结构内部杆件宽度为 0.24。3 种多孔结构的密度上下限均为$\rho_{max}=1.0$ 和$\rho_{min}=0.2$。

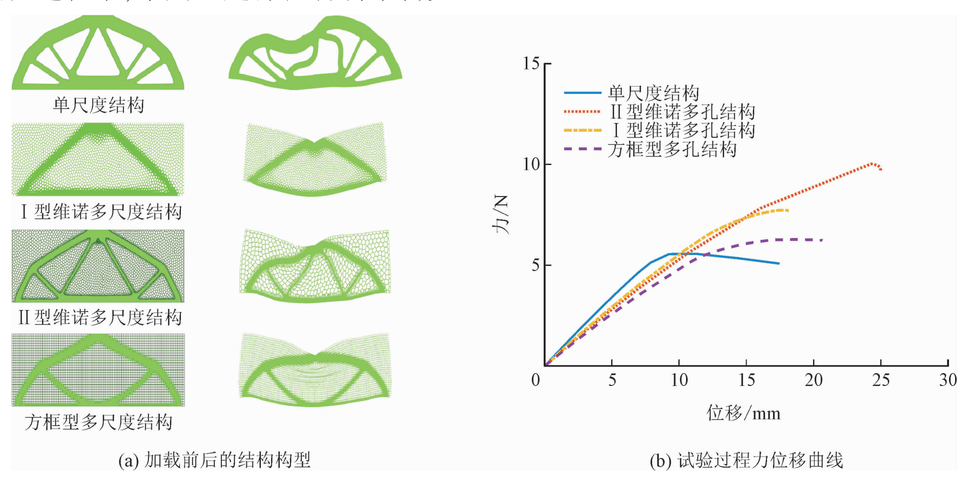



图 9 三点弯曲梁数值试验结果

Fig. 9 Results of three-point bending numerical experiment

4 种结构在加载前后的几何构型如图 9(a) 所示，可以看出，单尺度结构容易发生整体失稳，多孔结构内部发生局部失稳，而不容易发生整体失稳。图 9(b) 为试验过程的力位移曲线，可以看出，多孔结构的承载力和延展性较好于单尺度结构，单尺度结构刚度略优于多孔结构，表明多孔结构在刚度损失不大的前提下，可以提高结构承载力和延展性，在承载、抵抗冲击、吸能等方面具有较大的应用前景。

## 5　结　论

本研究基于计算均匀化方法，发展了一种尺度分离的梯度多孔结构多尺度优化设计方法。在微观尺度，生成了微结构几何构型，基于均匀化理论计算了微观结构的宏观等效弹性性质，建立了微结构物理量（宏观等效弹性张量、切割高度及平均长细比）与相对密度之间的映射关系；在宏观尺度，基于无惩罚的变密度拓扑优化方法，得到了宏观结构相对密度分布；在全尺度几何构建过程中，通过切割结构域的水平集函数，得到梯度多孔结构。该方法具有较高的计算效率，同时保证了相邻微结构较好连接。数值算例以非随机方框型多孔结构和随机维诺型多孔结构（Ⅰ、Ⅱ）为例，与传统参数化水平集方法优化得到的单尺度结构进行对比，通过全尺度非线性有限元分析，探究了多孔结构的尺寸效应和三点弯曲梁数值试验，验证了本研究方法的有效性及梯度多孔结构性能的优越性。结果表明，梯度多孔结构对尺寸效应敏感性较低，承载力和延展性相对传统单尺度结构有了较大的提升。



**参考文献：**


[1] PLOCHER J, PANESAR A. Review on design and structural optimisation in additive manufacturing: Towards next-generation lightweight structures[J]. Materials & design, 2019, 183: 108164.

[2] NAZIR A, ABATE K M, KUMAR A, et al. A state-of-the-art review on types, design, optimization, and additive manufacturing of cellular structures[J]. The international journal of advanced manufacturing technology, 2019, 104(9): 3489-3510.

[3] LIU J K, GAYNOR A T, CHEN S K, et al. Current and future trends in topology optimization for additive manufacturing[J]. Structural and multidisciplinary optimization, 2018, 57(6): 2457-2483.

[4] DU PLESSIS A, BROECKHOVEN C, YADROITSAVA I, et al. Beautiful and functional: A review of biomimetic design in additive manufacturing[J]. Additive manufacturing, 2019, 27: 408-427.

[5] HA N S, LU G X. A review of recent research on bio-inspired structures and materials for energy absorption applications[J]. Composites part B: Engineering, 2020, 181: 107496.

[6] WU W W, HU W X, QIAN G A, et al. Mechanical design and multifunctional applications of chiral mechanical metamaterials: A review[J]. Materials & design, 2019, 180: 107950.

[7] RODRIGUES H, GUEDES J M, BENDSOE M P. Hierarchical optimization of material and structure[J]. Structural and multidisciplinary optimization, 2002, 24(1): 1-10.

[8] CHEN W J, TONG L Y, LIU S T. Concurrent topology design of structure and material using a two-scale topology optimization[J]. Computers and structures, 2017, 178(C): 119-128.

[9] GROEN J P, WU J, SIGMUND O. Homogenization-based stiffness optimization and projection of 2D coated structures with orthotropic infill[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2019, 349: 722-742.

[10] XIA L, BREITKOPF P. Concurrent topology optimization design of material and structure within FE2 nonlinear multiscale analysis framework[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2014, 278: 524-542.

[11] LIU C, DU Z L, ZHANG W S, et al. Additive manufacturing-oriented design of graded lattice structures through explicit topology optimization[J]. Journal of applied mechanics, 2017, 84(8): 081008.

[12] ZONG H M, LIU H, MA Q P, et al. VCUT level set method for topology optimization of functionally graded cellular structures[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2019, 354: 487-505.

[13] LIU H, ZONG H M, SHI T L, et al. M-VCUT level set method for optimizing cellular structures[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2020, 367: 113154.

[14] XIA Q, ZONG H M, SHI T L, et al. Optimizing cellular structures through the M-VCUT level set method with microstructure mapping and high order cutting[J]. Composite structures, 2021, 261: 113298.

[15] LIU H, ZONG H M, TIAN Y, et al. A novel subdomain level set method for structural topology optimization and its application in graded cellular structure design[J]. Structural and multidisciplinary optimization, 2019, 60(6): 2221-2247.

[16] TAO W J, LEU M C. Design of lattice structure for additive manufacturing[C]//2016 International Symposium on Flexible Automation (ISFA). Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2016: 325-332.

[17] TAMBURRINO F, GRAZIOSI S, BORDEGONI M. The design process of additively manufactured mesoscale lattice structures: A review[J]. Journal of computing and information science in engineering, 2018, 18(4): 040801.

[18] 杜义贤，李荣，田启华，等. 具有吸能和承载特性的多孔结构拓扑优化[J]. 华中科技大学学报（自然科学版），2019, 47(8): 108-113.
DU Yixian, LI Rong, TIAN Qihua, et al. Topological optimization of porous structure with energy absorption and loading capability[J].

Journal of Huazhong University of Science and Technology(natural science edition),2019,47(8):108-113(in Chinese).

[19] 李汪颖,杨雄伟,李跃明. 多孔材料夹层结构声辐射特性的两尺度拓扑优化设计[J]. 航空学报,2016,37(4):1196-1206.
LI Wangying,YANG Xiongwei,LI Yueming. Two-scale topology optimization design of sandwich structures of a porous core with respect to sound radiation[J]. Acta aeronautica et astronautica Sinica,2016,37(4):1196-1206(in Chinese).

[20] HAN Y F,LU W F. A novel design method for nonuniform lattice structures based on topology optimization[J]. Journal of mechanical design,2018,140(9):091403.

[21] CHENG L,ZHANG P,BIYIKLI E,et al. Efficient design optimization of variable-density cellular structures for additive manufacturing: Theory and experimental validation[J]. Rapid prototyping journal,2017,23(4):660-677.

[22] LI D W,LIAO W H,DAI N,et al. Optimal design and modeling of gyroid-based functionally graded cellular structures for additive manufacturing[J]. Computer-aided design,2018,104:87-99.

[23] 郭新路,刘蓉,王永轩. 仿骨小梁力学性能的多孔结构拓扑优化设计[J]. 医用生物力学,2018,33(5):402-409.
GUO Xinlu,LIU Rong,WANG Yongxuan. Topology optimization of bionic porous structure based on biomechanical properties of trabecular bone[J]. Journal of medical biomechanics,2018,33(5):402-409(in Chinese).

[24] 胡传丰,任靖雯,胡慧,等. 基于等几何分析的参数多孔结构拓扑优化[J]. 吉林大学学报(理学版),2021,59(1):65-76.
HU Chuanfeng,REN Jingwen,HU Hui,et al. Topology optimization for parametric porous structure based on iso-geometric analysis[J]. Journal of Jilin University(science edition),2021,59(1):65-76(in Chinese).

[25] WU J,WANG W M,GAO X F. Design and optimization of conforming lattice structures[J]. IEEE transactions on visualization and computer graphics,2021,27(1):43-56.

[26] DO Q T,NGUYEN C H P,CHOI Y. Homogenization-based optimum design of additively manufactured voronoi cellular structures[J]. Additive manufacturing,2021,45:102057.

[27] LEI H Y,LI J R,XU Z J,et al. Parametric design of Voronoi-based lattice porous structures[J]. Materials & design, 2020, 191: 108607.

[28] PERSSON P O,STRANG G. A simple mesh generator in MATLAB[J]. SIAM review,2004,46(2):329-345.

[29] TALISCHI C,PAULINO G H,PEREIRA A,et al. PolyMesher: A general-purpose mesh generator for polygonal elements written in Matlab[J]. Structural and multidisciplinary optimization,2012,45(3):309-328.

[30] CAO S H, GREENHALGH S. Finite-difference solution of the eikonal equation using an efficient,first-arrival,wavefront tracking scheme[J]. Geophysics,1994,59(4):632-643.

[31] ANDREASSEN E,ANDREASEN C S. How to determine composite material properties using numerical homogenization[J]. Computational materials science,2014,83:488-495.

[32] CAVALLINI F. The best isotropic approximation of an anisotropic Hooke's law[J]. Bollettino di geofisica teorica ed applicata,1999,40(1):1-18.

[33] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京:清华大学出版社,2003.

（编辑 黄崇亚 史淑英）

